



ISSN 3030-3702

TEXNIKA FANLARINING
DOLZARB MASALALARI

TOPICAL ISSUES OF TECHNICAL
SCIENCES



№ 11 (3) 2025

TECHSCIENCE.UZ

Nº 11 (3)-2025

**TEXNIKA FANLARINING DOLZARB
MASALALARI**

**TOPICAL ISSUES
OF TECHNICAL SCIENCES**

TOSHKENT-2025

BOSH MUHARRIR:

KARIMOV ULUG'BEK ORIFOVICH

TAHRIR HAY'ATI:

Usmankulov Alisher Kadirkulovich - Texnika fanlari doktori, professor, Jizzax politexnika universiteti

Fayziyev Xomitxon - texnika fanlari doktori, professor, Toshkent arxitektura qurilish instituti;

Rashidov Yusuf Karimovich - texnika fanlari doktori, professor, Toshkent arxitektura qurilish instituti;

Adizov Bobirjon Zamirovich - Texnika fanlari doktori, professor, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Umumiy va noorganik kimyo instituti;

Abdunazarov Jamshid Nurmuxamatovich - Texnika fanlari doktori, dotsent, Jizzax politexnika universiteti;

Umarov Shavkat Isomiddinovich - Texnika fanlari doktori, dotsent, Jizzax politexnika universiteti;

Bozorov G'ayrat Rashidovich - Texnika fanlari doktori, Buxoro muhandislik-texnologiya instituti;

Maxmudov Muxtor Jamolovich - Texnika fanlari doktori, Buxoro muhandislik-texnologiya instituti;

Asatov Nurmuxammat Abdunazarovich - Texnika fanlari nomzodi, professor, Jizzax politexnika universiteti;

Mamayev G'ulom Ibroximovich - Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), Jizzax politexnika universiteti;

Ochilov Abduraxim Abdurasulovich - Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), Buxoro muhandislik-texnologiya instituti.

OAK Ro'yxati

Mazkur jurnal O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasi Rayosatining 2025-yil 8-maydagi 370-son qarori bilan texnika fanlari bo'yicha ilmiy darajalar yuzasidan dissertatsiyalar asosiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Muassislar: "SCIENCEPROBLEMS TEAM" mas'uliyati cheklangan jamiyati;
Jizzax politexnika insituti.

**TECHSCIENCE.UZ- TEXNIKA
FANLARINING DOLZARB
MASALALARI** elektron jurnal
15.09.2023-yilda 130343-sonli
guvohnoma bilan davlat ro'yxatidan
o'tkazilgan.

Barcha huqular himoyalangan.
© Sciencesproblems team, 2025-yil
© Mualliflar jamoasi, 2025-yil

TAHRIRIYAT MANZILI:

Toshkent shahri, Yakkasaroy tumani, Kichik Beshyog'och ko'chasi, 70/10-uy.
Elektron manzil:
scienceproblems.uz@gmail.com

MUNDARIJA

<i>Рахмонов Зафар, Урунбаев Жасур</i>	
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ КРОСС-ДИФФУЗИИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПЛОТНОСТНЫМИ	4-15
<i>Mullajonova Fotima</i>	
SIGNALLARGA RAQAMLI ISHLOV BERISHDA VEYVLET USULLARINING TAHLILI	16-23
<i>Qutlimuratov Yusup</i>	
QISHLOQ XO'JALIGI ISHLAB CHIQARISHINI JOYLASHTIRISH MASALASIGA MASHINALI O'QITISH USULINI QO'LLASH.....	24-31
<i>Мирзаев Отабек, Норчаев Жалолиддин</i>	
ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РАСЧЕТ ПИТАЮЩЕГО ЦИЛИНДРА С УПРУГИМ ОБОЛОЧКАМИ В ЗОНАХ ПИТАНИЯ ПНЕВМОМЕХАНИЧЕСКИЙ ПРЯДИЛЬНЫХ МАШИН	32-39
<i>Хамзаев Дишод</i>	
ИНФРАКРАСНЫЕ ВЛАГОМЕРЫ ХЛОПКА: ПРИНЦИПЫ ДЕЙСТВИЯ, ОСОБЕННОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ	40-45
<i>Xolmirzayev Sattar, Axmedov Akmaljon</i>	
BAZALT VA PO'LAT TOLALI FIBROBETONNING MEXANIK XUSUSIYATLARI	46-50
<i>Mavlonov Ravshanbek, No'manova Soxiba</i>	
KOMBINATSİYALASHGAN PO'LAT VA BAZALT KOMPOZIT ARMATURALI TEMIRBETON TO'SINLARNI NORMAL KESIM BO'YICHA MUSTAHKAMLIGI	51-57

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ КРОСС-ДИФФУЗИИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПЛОТНОСТНЫМИ

Рахмонов Зафар Равшанович

Доктор физико-математических наук, профессор
Профессор Национального университета Узбекистана

Урунбаев Жасур Эркинович

Доктор философии по техническим наукам, доцент
Доцент Самаркандинского государственного университета имени Шарофа Рашидова
Email: jasururunbayev@gmail.com
Tel: +998 97 4200657
ORCID: 0000-0001-8799-0737

Аннотация. В работе исследуется асимптотика автомодельных решений нелинейной кросс диффузии системы, с нелокальными граничными условиями и плотносю. Построены различные автомодельные решения задачи для случая медленной диффузии, являющиеся асимптотикой решений рассматриваемой задачи. Получен главный член асимптотики автомодельных решений. Для численного исследования рассматриваемой задачи предложен способ выбора оптимального начального приближения для итерационного процесса. Используя асимптотические формулы в качестве начального приближения для итерационного процесса, произведены численные расчеты. Результаты расчета визуализированы по времени и проведены анализ результатов.

Ключевые слова: кросс-диффузия, нелинейные граничные условия, автомодельный.

NUMERICAL SIMULATION OF A CROSS-DIFFUSION SYSTEM WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS AND DENSITY

Zafar Ravshanovich Rakhmonov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Professor, National University of Uzbekistan

Jasur Erkinovich Urunbaev

Doctor of Philosophy in Technical Sciences, Associate Professor
Associate Professor, Sharof Rashidov Samarkand State University

Annotation. This paper examines the asymptotic behavior of self-similar solutions to a nonlinear cross-diffusion system with nonlocal boundary conditions and density. Various self-similar solutions to the problem for the case of slow diffusion are constructed, representing the asymptotic behavior of the solutions to the problem under consideration. The leading term of the asymptotic behavior of the self-similar solutions is obtained. For the numerical study of the problem under consideration, a method for selecting the optimal initial approximation for the iterative process is proposed. Numerical calculations are performed using asymptotic formulas as the initial approximation for the iterative process. The calculation results are visualized over time, and an analysis is provided.

Keywords: cross-diffusion, nonlinear boundary conditions, self-similar.

DOI: <https://doi.org/10.47390/ts-v3i11y2025No1>

1. Введение

В данной работе рассматривается система кросс диффузии, с нелинейными граничными условиями описывающие процесс теплопроводности в неоднородной среде

$$\rho(x) \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{3-i}^{m_i-1} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|^{P-2} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$-u_{3-i}^{m_i-1} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|^{P-2} \frac{\partial u_i}{\partial x} (0, t) = u_i^{q_i} (0, t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u_i (x, 0) = u_{i0} (x), \quad x \in R_+, \quad (3)$$

где $\rho(x) = (1 + |x|)^n$, $P > \max \{m_1, m_2\} + 1$, $m_i > 1$, $q_i > 0 (i = 1, 2)$, $u_{i0}(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+ .

Физико-математическая природа кросс-диффузии заключается в описании динамики расселения нескольких видов или компонентов, где движение одного компонента существенно зависит не только от его собственного состояния, но и от состояния других компонентов. Этот механизм особенно важен в контексте перенаселения (overcrowding dispersal), когда организмы или частицы стремятся рассредоточиться для снижения локальной плотности. Соответственно приложения реакции-кросс-диффузии системы широко распространены в литературе и включают формирование развития паттернов в биологии [1], электрохимию [2], моторику рака [3-5] и биопленки [6]. Введение кросс-диффузии в стандартных моделях реакции-диффузии было показано, что для предотвращения явлений взрыва, связанных с такими системами, отсутствует перекрестная диффузия [7]. Явные аналитические решения этих сложных и часто нелинейно связанных систем дифференциальных уравнений в частных производных редко существуют и таким образом, несколько численных методов были применены для получения приближенных решений.

Такие системы реакции-диффузии не только математически сложны, но и имеют важные практические приложения [2,4-6]. В экологии они используются для моделирования распространения, конкуренции и эволюции видов. В области теплопередачи они описывают передачу тепла и распределение температуры внутри материалов, а в химических реакциях используются для прогнозирования скорости реакции и производства продуктов [5,6,10]. Поэтому глубокое изучение природы и динамического поведения решений таких систем уравнений важно для понимания механизмов природных явлений и оптимизации инженерного проектирования и стратегий управления.

Кроме того, кросс-диффузационные модели встречаются в различных областях естествознание. Например, в физических системах (физика плазмы) [8-10], в химических системах (динамика электролитических растворов), в биологических системах (кросс-диффузионный транспорт, динамика популяционных систем), в экологии (динамика возрастной структуры леса), в сейсмологии - модель Бурриджа-Кнопоффа, описывающая взаимодействие тектонических плит [11-14]. В последние годы при исследовании биологической популяции и движение тектонических плит активно применяются математические модели с кросс - диффузией [14, 15].

В последнее годы интенсивно изучается условие глобального существования решений и условие возникновения режима с обострением (blow-up) (см. [1-7, 11, 13-17]). В работе [18, 19] изучены условия глобальной разрешимости и неразрешимости по времени решение и установили оценку решения вблизи времени взрыва нелокальной задачи диффузии

$$u_t = u_{xx}, \quad v_t = v_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < T < 0, \quad (4)$$

$$-u_x(0, t) = u^\alpha v^p, \quad -v_x(0, t) = u^q v^\beta, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0. \quad (6)$$

Доказано, что если $pq \leq (1-\alpha)(1-\beta)$, то всякое решение задачи (4)-(6) является глобальным.

Система уравнений (1) при $m_i > 1$ ($i=1, 2$) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений.

Система (1) имеет ограниченные автомодельные решения с компактным носителем следующего вида

$$\underline{u}_i(x, t) = (T+t)^{-\alpha_i} f_i(\xi), \quad \xi = (1+x)(T+t)^{-\beta}, \quad \rho(x) = (1+|x|)^n \quad (7)$$

где $T > 0$,

$$\beta = \frac{(q_i-1)(q_{3-i}-1) - (q_i-1)(m_i-1) - (q_{3-i}-1)(P-2)}{(q_i-1)(q_{3-i}-1)(P+n) - (q_i-1)(m_i-1)(1+n) - (q_{3-i}-1)(P-2)(1+n)},$$

$$\alpha_i = \frac{1-\beta(1+n)}{q_i-1}.$$

а функции $(\varphi(\xi), \phi(\xi))$ являются решением следующей задачи

$$\frac{d}{d\xi} \left(\varphi_{3-i}^{m_i-1} \left| \frac{d\varphi_i}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\varphi_i}{d\xi} \right) + \beta \xi^{n+1} \frac{d\varphi_i}{d\xi} + \alpha_i \xi^n \varphi_i = 0 \quad (8)$$

$$\varphi_{3-i}^{m_i-1} \left| \frac{d\varphi_i}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\varphi_i}{d\xi}(0) = \varphi_i^{q_i}(0) \quad (9)$$

которая получается после подстановки (7) в (1)-(3) и некоторых упрощений. Рассмотрим следующие функции

$$\phi_i(\xi) = A_i (a - \xi^\gamma)^{\gamma_i} \quad (10)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{p+n}{p-1}, \quad \gamma_i = \frac{(P-1)(P-1-m_i)}{(P-2)^2 - (m_i-1)(m_{3-i}-1)}, \quad a > 0.$$

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $P > \max\{m_i, m_{3-i}\} + 1$, тогда решение с компактным носителем системы уравнений (11) при $\xi \rightarrow a^{\frac{P-1}{P+n}}$ имеет асимптотику

$$\varphi_i(\xi) = c_i \varphi_i(\xi) (1 + o(1)). \quad (11)$$

$$\text{где } c_i = \left(\frac{\gamma \beta \operatorname{sgn}(-\gamma_i)}{\frac{n+1}{\gamma} |\gamma_i|^{P-1}} \right)^{\frac{1}{P-1}}$$

Доказательство. Ищем решение системы уравнений (11) в следующем виде

$$\varphi_i(\xi) = \varphi_i(\xi) w_i(\eta) \quad (12)$$

где $\eta = -\ln \left(a - \xi^{\frac{P+n}{P-1}} \right)$, $w_i(\eta)$ - неотрицательные и ограниченные функции, $\eta \rightarrow \infty$

при $\xi \rightarrow a^{\frac{P-1}{P+n}}$. После подстановки (12) в (8) получим следующую систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} Q_i(w_i, w_{3-i}) + \left(\frac{n+1}{\gamma} \frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} - \gamma_i \right) Q_i(w_i, w_{3-i}) + \frac{\beta \gamma}{(\gamma \gamma_i)^{P-1} \gamma A_i^{P-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta} - \gamma_i w_i \right) - \\ - \frac{\alpha_i}{(\gamma \gamma_i)^{P-1} \gamma A_i^{P-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \frac{e^{-\eta}}{(a - e^{-\eta})} w_i = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

где $Q_i(w_i, w_{3-i}) = w_{3-i}^{m_i-1} (\gamma_i w_i - w_i')$, $Q_2(w_i, w_{3-i}) = w_i^{m_{3-i}-1} (\gamma_i w_{3-i} - w_{3-i}')$.

Отметим, что изучение решений последней системы уравнений является равносильным изучению тех решений системы уравнений (8), каждое из которых в некоторой промежутке $[\eta_0, +\infty)$, удовлетворяет неравенствам:

$$w_i(\eta) > 0, \gamma_i w_i - w_i' \neq 0,$$

$$w_i(\eta) > 0, \gamma_i w_{3-i} - w_{3-i}' \neq 0.$$

Покажем, что решения $(w_1(\eta), w_2(\eta))$ системы уравнений (13) имеют конечные пределы при $\eta \rightarrow +\infty$. Пусть

$$\begin{cases} h_1(\eta) = Q_1(w_1, w_2), \\ h_2(\eta) = Q_2(w_1, w_2). \end{cases} \quad (14)$$

Тогда систему (16) приведем к виду

$$\begin{aligned} h'_i(\eta) = - \left(\frac{n+1}{\gamma} \frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} - \gamma_i \right) h_i(\eta) - \frac{\beta \gamma}{(\gamma \gamma_i)^{P-1} \gamma A_i^{P-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta} - \gamma_i w_i \right) + \\ + \frac{\alpha_i}{(\gamma \gamma_i)^{P-1} \gamma A_i^{P-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \frac{e^{-\eta}}{(a - e^{-\eta})} w_i = 0. \end{aligned}$$

Для анализа решений последней системы уравнений рассмотрим следующие вспомогательные функции

$$R_i(\eta, \sigma_i) = -\left(\frac{n+1}{\gamma} \frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - \gamma_i\right) \sigma_i - \frac{\beta\gamma}{(\gamma\gamma_i)^{p-1} \gamma A_i^{p-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta} - \gamma_i w_i\right) + \\ + \frac{\alpha_i}{(\gamma\gamma_i)^{p-1} \gamma A_i^{p-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \frac{e^{-\eta}}{(a-e^{-\eta})} w_i = 0.$$

где $\sigma_i, i = 1, 2$ - действительные числа. Видно, что в соответствующей правой части последнего тождества функций $R_i(\eta, \sigma_i)$, $i = 1, 2$ сохраняют знак, т.е. удовлетворяют одно из неравенств

$$R_i(\eta, \sigma_1) > 0, R_i(\eta, \sigma_2) < 0. \quad (15)$$

в некотором промежутке $[\eta_{\sigma_i}, +\infty) \times [\eta_{\sigma_{3-i}}, +\infty)$, $\eta_{\sigma_i}, \eta_{\sigma_{3-i}} \in [\eta_0, +\infty)$. Допустим, что для функций $R_i(\eta, \sigma_i)$, $i = 1, 2$ пределы при $\eta \rightarrow +\infty$ не существуют. Тогда в силу колеблемости функций $R_i(\eta, \sigma_i)$, $i = 1, 2$, прямая $\bar{R}_i = \sigma_i$ ($i = 1, 2$) пересекает бесконечное число раз их графиками на интервале $[\eta_{\sigma_i}, +\infty) \times [\eta_{\sigma_{3-i}}, +\infty)$. Но, на интервале $[\eta_{\sigma_i}, +\infty) \times [\eta_{\sigma_{3-i}}, +\infty)$ выполняется одно из неравенств (15) и поэтому пересечение их графиков бесконечное число раз невозможно. Следовательно, графики функций $R_i(\eta, \sigma_i)$, $i = 1, 2$ пересекают прямую $\bar{R}_i = \sigma_i$ ($i = 1, 2$) на интервале $[\eta_{\sigma_i}, +\infty) \times [\eta_{\sigma_{3-i}}, +\infty)$ только один раз. Тогда, для функций $R_i(\eta, \sigma_i)$, $i = 1, 2$ существует предел при $\eta \rightarrow +\infty$. Следуя (17) для $G_1(\mu_1, \chi)$, $G_2(\mu_2, \psi)$, имеем

$$R_i = w_{3-i}^{m_i-1} (\gamma_i w_i - w_i')^{p-1} = (w_{3-i}^0)^{m_i-1} (\gamma_i w_i^0)^{p-1} + o(1)$$

Поэтому необходимо, чтобы

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{\gamma} \frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - \gamma_i \right) \sigma_i + \frac{\beta\gamma}{(\gamma\gamma_i)^{p-1} \gamma A_i^{p-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta} - \gamma_i w_i \right) - \frac{\alpha_i}{(\gamma\gamma_i)^{p-1} \gamma A_i^{p-2} A_{3-i}^{m_i-1}} \frac{e^{-\eta}}{(a-e^{-\eta})} w_i = 0.$$

Отсюда, с учетом следующего предельного перехода

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} = 0,$$

легко убедиться в том, что $w_i^0 = \left(\frac{\gamma\beta \operatorname{sgn}(-\gamma_i)}{\frac{n+1}{\gamma} |\gamma_i|^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ при $\eta \rightarrow +\infty$.

3. Численный анализ решений

Используя метод конечных разностей, построим численную систему. Для этого пространственная система координат уравнений (1) аппроксимируется со вторым порядком точности, а временная компонента - с первым. Процедура строится итеративно, а для решения линейной системы уравнений используется метод прогонки. Хорошо известно, что основной проблемой при численном решении нелинейной задачи

является выбор подходящего начального приближения для итерационного процесса. Качественное исследование нелинейной задачи используется для создания функций, отражающих определенные аспекты предполагаемого решения. Эти функции затем используются для решения конкретных задач. В зависимости от значений числовых параметров уравнений, эта задача может быть решена выбором подходящего начального приближения, которое использовалось в вычислениях с помощью приведенных ранее асимптотических формул. Результаты численных расчетов были взяты за основу. Ниже мы продемонстрируем численные методы и некоторые результаты вычислительного эксперимента.

Рассмотрим систему уравнений (1) с начальными данными (3) и краевыми условиями (2) и

$$\begin{cases} u_1(b, t) = \phi_1(t), \\ u_2(b, t) = \phi_2(t), \end{cases}$$

Для удобства перепишем систему (1) –(3) следующим образом

$$\begin{cases} \rho(x) \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), \\ \rho(x) \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} -K(u_1, u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = u_1^{q_1}(0, t), \\ -B(u_1, u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) = u_2^{q_2}(0, t), \quad t > 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$u_1(x, 0) = u_{10}(x), \quad u_2(x, 0) = u_{20}(x), \quad x \in R_+, \quad (18)$$

$$\text{где } K(u_1, u_2) = u_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|^{p-2}, \quad B(u_1, u_2) = u_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|^{p-2}.$$

Теперь построим равномерную сетку S_h по x с шагом h :

$$S_h = \{x_i = i \cdot h, h > 0, i = 1, 2, \dots, n, n \cdot h = b\},$$

и временную сетку

$$V_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, \tau > 0, j = 1, 2, \dots, m, m \cdot \tau = T, T > 0\}.$$

Построим разностную схему. Для этого используем метод баланса и неявную разностную схему:

$$\begin{cases} \left(1 + |x_i|\right)^n \frac{u_{1i}^{j+1} - u_{1i}^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[K_{i+1}(u_1) (u_{1i+1}^{j+1} - u_{1i}^{j+1}) - K_i(u_1) (u_{1i}^{j+1} - u_{1i-1}^{j+1}) \right], \\ \left(1 + |x_i|\right)^n \frac{u_{2i}^{j+1} - u_{2i}^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[B_{i+1}(u_1) (u_{2i+1}^{j+1} - u_{2i}^{j+1}) - B_i(u_1) (u_{2i}^{j+1} - u_{2i-1}^{j+1}) \right], \end{cases} \quad (19)$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\begin{cases} u_{1i}^0 = u_1(x_i, 0), \\ u_{2i}^0 = u_2(x_i, 0), \end{cases} \quad i = 0, 1, K, n, \quad (20)$$

$$\begin{cases} -K_1(u_1, u_2) \frac{u_{1,1}^{j+1} - u_{1,0}^{j+1}}{h} = (u_{1,0}^j)^{q_1}, \\ -B_1(u_1, u_2) \frac{u_{2,1}^{j+1} - u_{2,0}^{j+1}}{h} = (u_{1,0}^j)^{q_2}, \end{cases} \quad j = 0, 1, K, m-1, \quad (21)$$

$$\begin{cases} u_{1n}^j = \phi_1(t_j), \\ u_{2n}^j = \phi_2(t_j), \end{cases} \quad j = 2, 3, K, m. \quad (22)$$

где $K(u_1, u_2)$, $B(u_1, u_2)$ вычисляются по одной из следующих формул

$$a) \begin{cases} K_i(u_1, u_2) = K\left(\frac{u_{1i} + u_{1i-1}}{2}, \frac{u_{2i} + u_{2i-1}}{2}\right), \\ B_i(u_1, u_2) = B\left(\frac{u_{1i} + u_{1i-1}}{2}, \frac{u_{2i} + u_{2i-1}}{2}\right), \end{cases} \quad (23)$$

$$b) \begin{cases} K_i(u_1, u_2) = \frac{K(u_{1i}, u_{2i}) + K(u_{1i-1}, u_{2i-1})}{2}, \\ B_i(u_1, u_2) = \frac{B(u_{1i}, u_{2i}) + B(u_{1i-1}, u_{2i-1})}{2}. \end{cases} \quad (24)$$

Видно, что системы алгебраических уравнений (19) нелинейные относительно u^{j+1} и v^{j+1} . Для численного решения таких систем нелинейных уравнений применимы различные итерационные методы. Используем для них метод простой итерации:

$$\begin{cases} \left(1 + |x_i|\right)^n \frac{u_{1i}^{j+1} - u_{1i}^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[K_{i+1} \left(\begin{matrix} s \\ u_2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} s+1 \\ u_{1i+1}^{j+1} - u_{1i}^{j+1} \end{matrix} \right) - K_i \left(\begin{matrix} s \\ u_2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} s+1 \\ u_{1i}^{j+1} - u_{1i-1}^{j+1} \end{matrix} \right) \right], \\ \left(1 + |x_i|\right)^n \frac{u_{2i}^{j+1} - u_{2i}^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[B_{i+1} \left(\begin{matrix} s \\ u_1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} s+1 \\ u_{2i+1}^{j+1} - u_{2i}^{j+1} \end{matrix} \right) - B_i \left(\begin{matrix} s \\ u_1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} s+1 \\ u_{2i}^{j+1} - u_{2i-1}^{j+1} \end{matrix} \right) \right], \end{cases} \quad (25)$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$

Известно, что итерационные методы требуют подходящего начального приближения, обеспечивающего быструю сходимость к точному решению и сохраняющего физический смысл задач. При этом в качестве подходящих начальных приближений выбираются выше полученные асимптотические формулы.

Значения начальной итерации для каждого шага по времени u_{1i}^0 , u_{2i}^0 берутся из

предыдущего шага по времени: $u_1^{j+1} = u_1^j$, $u_2^{j+1} = u_2^j$. При счете по итерационной схеме задается точность итерации, при которой процесс продолжается до тех пор, пока не выполняются условия

$$\begin{cases} \max_{0 \leq i \leq n} \left| \overset{s+1}{u_{1i}} - \overset{s}{u_{i1}} \right| < \varepsilon, \\ \max_{0 \leq i \leq n} \left| \overset{s+1}{u_{2i}} - \overset{s}{u_{2i}} \right| < \varepsilon. \end{cases}$$

Введем обозначения $\bar{u}_{1i} = \overset{s+1}{u_{1i}}$, $\bar{u}_{2i} = \overset{s+1}{u_{2i}}$. Тогда разностные уравнения (25) можно записать в виде

$$\begin{cases} \overset{s}{A_{1i}} \bar{u}_{1i-1} - \overset{s}{C_{1i}} \bar{u}_{1i} + \overset{s}{B_{1i}} \bar{u}_{1i+1} = -\overset{s}{F_{1i}}, \\ \overset{s}{A_{2i}} \bar{u}_{2i-1} - \overset{s}{C_{2i}} \bar{u}_{2i} + \overset{s}{B_{2i}} \bar{u}_{2i+1} = -\overset{s}{F_{2i}}, \end{cases} \quad (26)$$

где A_{1i} , A_{2i} , B_{1i} , B_{2i} , C_{1i} , C_{2i} , F_{1i} , F_{2i} учитывая формулы (22), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \overset{s}{A_{1i}} &= \frac{\tau}{h^2 (1 + |x_i|)^n} K_i \left(\overset{s}{u_1}, \overset{s}{u_2} \right) = \\ &= \frac{\tau}{2h^2 (1 + |x_i|)^n} \left(\left(\overset{s}{u_{2i}} \right)^{m_1-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{1i}} - \overset{s}{u_{1i-1}}}{h} \right|^{P-2} + \left(\overset{s}{u_{2i-1}} \right)^{m_1-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{1i-1}} - \overset{s}{u_{1i-2}}}{h} \right|^{P-2} \right), \\ \overset{s}{A_{2i}} &= \frac{\tau}{h^2 (1 + |x_i|)^n} B_i \left(\overset{s}{u_1}, \overset{s}{u_2} \right) = \\ &= \frac{\tau}{2h^2 (1 + |x_i|)^n} \left(\left(\overset{s}{u_{1i}} \right)^{m_2-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{2i}} - \overset{s}{u_{2i-1}}}{h} \right|^{P-2} + \left(\overset{s}{u_{1i-1}} \right)^{m_2-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{2i-1}} - \overset{s}{u_{2i-2}}}{h} \right|^{P-2} \right), \\ \overset{s}{B_{1i}} &= \frac{\tau}{h^2 (1 + |x_i|)^n} K_{i+1} \left(\overset{s}{u_1}, \overset{s}{u_2} \right) = \\ &= \frac{\tau}{2h^2 (1 + |x_i|)^n} \left(\left(\overset{s}{u_{2i+1}} \right)^{m_1-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{1i+1}} - \overset{s}{u_{1i}}}{h} \right|^{P-2} + \left(\overset{s}{u_{2i}} \right)^{m_1-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{1i}} - \overset{s}{u_{1i-1}}}{h} \right|^{P-2} \right), \\ \overset{s}{B_{2i}} &= \frac{\tau}{h^2 (1 + |x_i|)^n} B_{i+1} \left(\overset{s}{u_1}, \overset{s}{u_2} \right) = \\ &= \frac{\tau}{2h^2 (1 + |x_i|)^n} \left(\left(\overset{s}{u_{1i+1}} \right)^{m_2-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{2i+1}} - \overset{s}{u_{2i}}}{h} \right|^{P-2} + \left(\overset{s}{u_{1i}} \right)^{m_2-1} \left| \frac{\overset{s}{u_{2i}} - \overset{s}{u_{2i-1}}}{h} \right|^{P-2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^s C_{1i} &= \frac{\tau}{h^2 (1+|x_i|)^n} \left(K_i \left({}^s u_1, {}^s u_2 \right) + K_{i+1} \left({}^s u_1, {}^s u_2 \right) \right) + 1, \\
 {}^s C_{2i} &= \frac{\tau}{h^2 (1+|x_i|)^n} \left(B_i \left({}^s u_1, {}^s u_2 \right) + B_{i+1} \left({}^s u_1, {}^s u_2 \right) \right) + 1, \\
 {}^s F_{1i} &= {}^s u_i^{j+1}, \\
 {}^s F_{2i} &= {}^s v_i^{j+1}.
 \end{aligned}$$

Значения концевых ординат на концах отрезка $0 \leq x \leq b$ можно получить по формуле Милна:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_0 \approx \frac{-u_{i2} + 4u_{i1} - 3u_{i0}}{2h}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_n \approx \frac{3u_{in} - 4u_{in-1} + u_{in-2}}{2h},$$

которые считаются более точными.

Для численного решения системы алгебраических уравнений (26) применяется метод прогонки. Согласно методу прогонки

$$\begin{cases} \bar{u}_{1i} = \alpha_{1i} (\beta_{1i} + \bar{u}_{1i+1}), \\ \bar{u}_{2i} = \alpha_{2i} (\beta_{2i} + \bar{u}_{2i+1}), \end{cases} \quad (27)$$

где α_{1i} , α_{2i} , β_{1i} , β_{2i} - коэффициенты, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{cases} \alpha_{1i+1} = \frac{B_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, \\ \alpha_{2i+1} = \frac{B_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, \\ \beta_{1i+1} = \frac{A_{1i} \beta_{1i} + F_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, \\ \beta_{2i+1} = \frac{A_{2i} \beta_{2i} + F_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Значения α_{10} , α_{20} , β_{10} , β_{20} находятся из краевых условий (21).

Используя вышеизложенные численные схемы, проведен вычислительный эксперимент. Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Шаг сетки достаточно мелкий $h=0.05$, число узлов $N=2500$ и точность итерации задается $\varepsilon = 10^{-5}$. Счет проводился до $t=2$ с шагом $\tau = 0.02$. В качестве начального приближения для итерационного процесса брались формулы (10), (14).

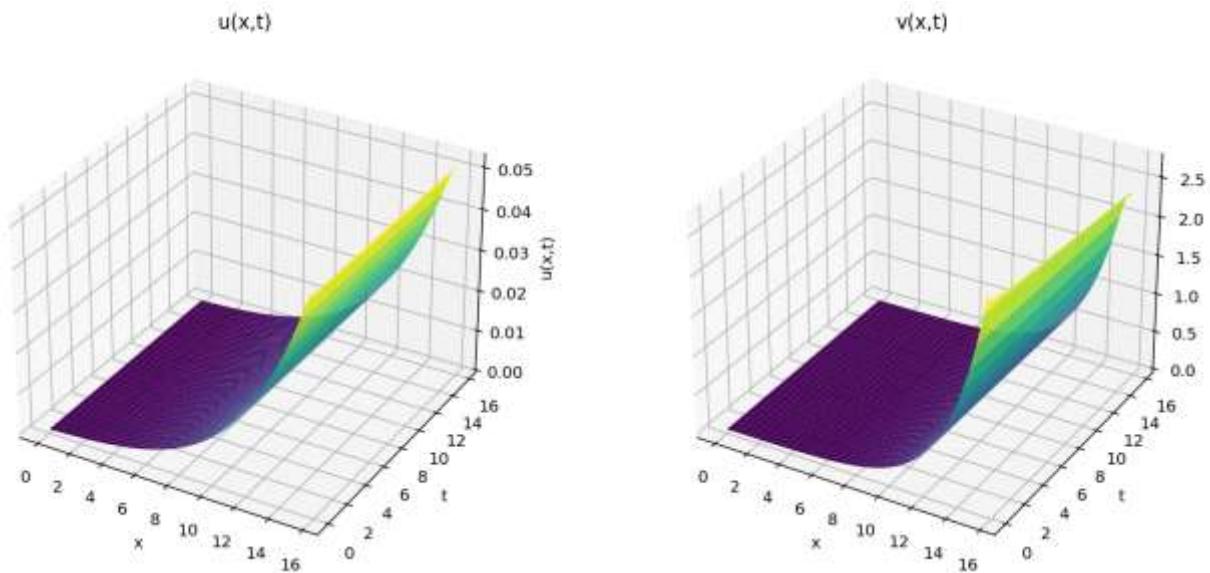


Рис.1. Численное решение задачи(1)-(3) при $q_1 = 2.5, q_2 = 2.7, p = 3.7, m_1 = 1.85, m_2 = 1.5$.

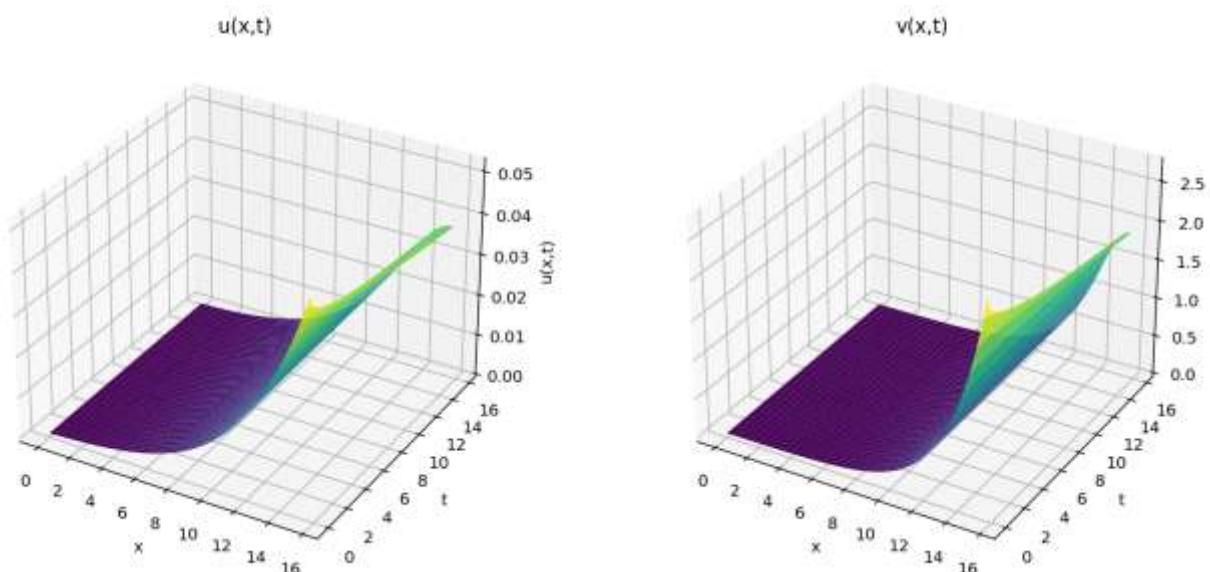


Рис. 2. Численное решение задачи (1)-(3) при $q_1 = 2.75, q_2 = 2.8, p = 3.25, m_1 = 2, m_2 = 1.6$.

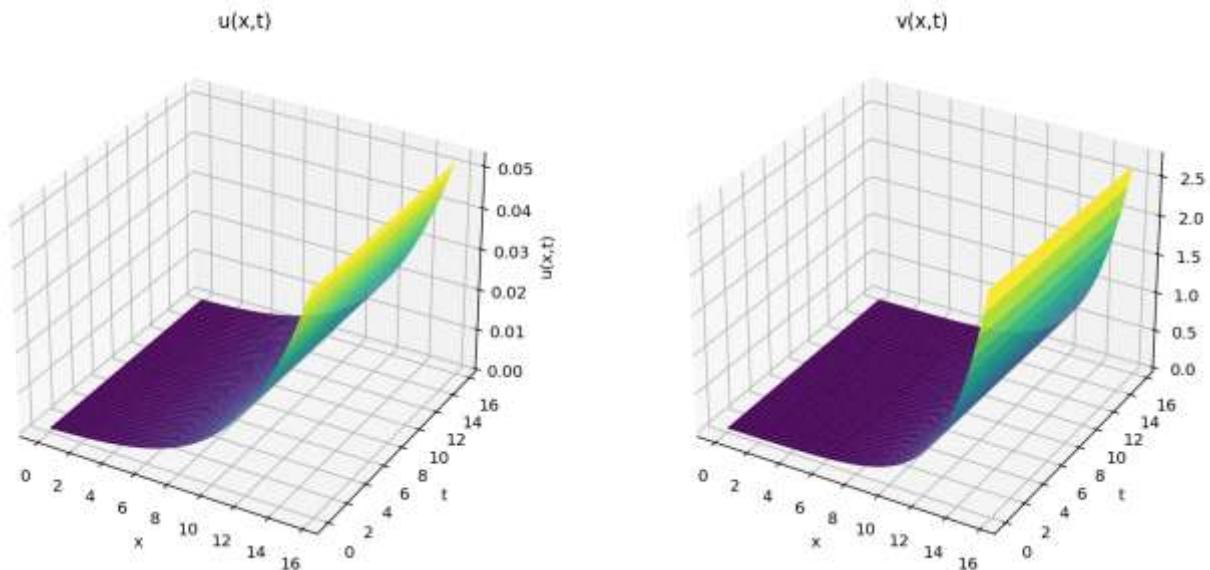


Рис. 3. Численное решение задачи (1)-(3) при $q_1 = 2.3$, $q_2 = 2.2$, $p = 3$, $m_1 = 1.9$, $m_2 = 1.4$.

4. Вывод

На рис. 1-3 представлены графики результатов численного решения задачи (1)-(3) при $m_i > 1$ ($i=1,2$), соответствующей случаю медленной диффузии. При $m_i > 1$ ($i=1,2$), как следует из асимптотических формул (7), (11) и графиков, перемещение объекта происходит с конечной скоростью. Глубина проникновения диффузионной волны зависит от времени и фронта волны (точка, в которой $u(x,t)$, $v(x,t)$ обращаются в нуль) для каждой среды, находящейся в конечной точке: $x_\phi = a^{(p-1)/p} (T+t)^\beta < \infty$.

Результаты численных экспериментов показывают быструю сходимость итерационного процесса за счет удачного выбора начального приближения. Тем самым предложенный метод даёт возможность решить проблему выбора подходящего начального приближения.

Исследование З.Р.Рахмонова поддержано Министерством высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан (проект № ФЛ-8824063232).

Adabiyotlar/Литература/References:

1. Nie Y-Y, Thomee V. A lumped mass finite-element method with quadrature for a non-linear parabolic problem. *IMA J. Numer. Anal.*, 5 (1985) 371-396. <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/5.4.371>.
2. Vanag V.K., Epstein I.R. Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 11 (2009) 897-912. <http://dx.doi.org/10.1039/B813825G>.
3. Elliott C.M., Stuart A.M., The global dynamics of discrete semilinear parabolic equations. *SIAM J Num. Anal.*, 30 (1993) 1622-1663. <http://dx.doi.org/10.1137/0730084>.
4. Gerisch A., Chaplain M.A.J., Robust numerical methods for taxis-diffusion-reaction systems. applications to biomedical problems, *Math. Comp. Mod.*, 43(2006)49-75. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2004.05.016>.
5. Hittmeir S., Jungel A., Cross diffusion preventing blow-up in the two - dimensional Keller-Segel Model. *SIAM J Math. Anal.*, 43 (2011) 997-1022. <http://dx.doi.org/10.1137/100813191>.
6. Hoff D., Stability and convergence of finite difference methods for systems of nonlinear reaction-diffusion equations. *SIAM J Num. Anal.*, 15 (1978) 1161-1177. <http://dx.doi.org/10.1137/0715077>.
7. Dziuk G., Elliott C.M., Finite element methods for surface PDEs, *Acta Numer.* 22 (2013) 289-396. <http://dx.doi.org/10.1017/s0962492913000056>.
8. Арипов М.М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. 1988. Ташкент, Фан, 1988.
9. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. / Калашников А.С.// УМН, 1987, т.42, Вып.2 (254) 135-176.
10. Wu Z.Q., Zhao J.N., Yin J.X. and Li H.L. *Nonlinear Diffusion Equations*. Singapore: World Scientific, 2001.
11. Levine H., The role of critical exponents in blowup theorems. *SIAM Rev.*, 32(2), 1990, 262-288.
12. Murray J.D. *Mathematical Biology*. Berlin: Springer, 2002-2003 3rd ed..

13. Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E. Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulations. London: Chapman and Hall/CRC Press, 2008.
14. Tsyganov M.A., Biktashev V.N., Brindley J., Holden A.V., Ivanitsky G.R., Waves in cross-diffusion systems - a special class of nonlinear waves. *UFN*, 2007, vol. 177, issue 3, 275-300. doi: <http://dx.doi.org/10.1070/PU2007v050n03ABEH006114>
15. Rakhmonov Z., Urunbaev J., and Alimov A. Properties of solutions of a system of nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions// AIP Conference Proc., 2022 vol. 2637, no. 1, pp. 040008-1-12. doi:10.1063/5.0119747
16. Rakhmonov Z., Alimov A., Urunbaev J. On the behavior of solutions for a system of multidimensional diffusion equations with nonlinear boundary conditions // AIP Conference Proc., 2024, vol. 3085, no. 1, pp. 020032. <https://doi.org/10.1063/5.0194896>
17. Rakhmonov Z., Urunbaev E., Urunbaev J., Joniev A. On a problem of multidimensional cross-diffusion with nonlinear boundary conditions // International Journal of Applied Mathematics 2025 vol. 38 No. 1s, P. 987-996.
18. Wang S, Xie C H, Wang M X. Note on critical exponents for a system of heat equations with coupled boundary conditions. *J Math Analysis Appl*, 1998, 218: 313-324.
19. Wang S, Xie C H, Wang M X, Blow-up rate for a system of heat equations fully coupled in boundary conditions. *Nonlinear Analysis*, 1999, 35: 389-398.

TECHSCIENCE.UZ

**TEXNIKA FANLARINING DOLZARB
MASALALARI**

Nº 11 (3)-2025

TOPICAL ISSUES OF TECHNICAL SCIENCES

**TECHSCIENCE.UZ- TEXNIKA
FANLARINING DOLZARB MASALALARI**
elektron jurnali 15.09.2023-yilda 130346-
sonli guvohnoma bilan davlat ro'yxatidan
o'tkazilgan.

Muassislar: "SCIENCEPROBLEMS TEAM"
mas'uliyati cheklangan jamiyati;
Jizzax politeknika insituti.

TAHRIRIYAT MANZILI:
Toshkent shahri, Yakkasaroy tumani, Kichik
Beshyog'och ko'chasi, 70/10-uy.
Elektron manzil:
scienceproblems.uz@gmail.com